Física Teórica II
Práctica 2: Formalismo
Parte I: Operadores, autoestados y cambio de base.

1. Cambio de Base

   a) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$, ... y $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$, ... son todos conocidos, donde $|a'\rangle$, $|a''\rangle$, ... forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

   b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explícitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

2. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

3. Considere un espacio de kets generado por los autoestados $\{|a'\rangle\}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.

   a) Pruebe que $\prod_{a'}(A - a')$ es el operador nulo.

   b) ¿Cuál es el significado del operador $\prod_{a''\neq a'} \frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ para un a'' dado?

   c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín 1/2.

4. Un cierto observable en mecánica cuántica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

   b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

5. Sean A y B dos observables. Suponga que los autokets simultáneos de A y B $\{|a', b'\rangle\}$, forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela; si es no, dé un contraejemplo.

6. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

7. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explícitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

8. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ están dados por

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0 y b son constantes reales reales.

a) ¿$\hat{H}$ y $\hat{B}$ son hermíticos?

b) ¿$\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan?

c) En caso que conmuten, construir una base de autovectores comunes a ambos operadores.

d) ¿Cuáles de los conjuntos $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ son CCOC?

Parte II: Principio de incertidumbre.

9. Demostrar la desigualdad de Schwarz, que dice que si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son dos vectores arbitrarios en el mismo espacio vectorial, entonces

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2,$$

y la igualdad sólo se produce si estos vectores son proporcionales.
Ayuda: Considerar el ket

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle.$$

Siendo este un vector del espacio vectorial, su norma debe ser no–negativa. Elegir el valor

$$\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}.$$

10. Dar un ejemplo en que se cumpla la desigualdad de Schwartz.

11. Principio de Incertidumbre

a) Para dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle \left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A, B]\rangle\right|^2,$$

donde $\Delta A = \hat{A} - \left\langle\hat{A}\right\rangle$.

b) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

$$\Delta A\,|\alpha\rangle = \lambda\Delta B\,|\alpha\rangle$$

donde λ es un imaginario puro.

12. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i\,\langle p\rangle\, x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2} \ .$$

Muestre que también se cumple la condición

$$\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = c\,\langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$$

donde c es un número imaginario.

13. Calcule

$$\left\langle(\Delta S_x)^2\right\rangle \equiv \left\langle\hat{S}_x^2\right\rangle - \left\langle\hat{S}_x\right\rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado $|S_z+\rangle$. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2$$

con $\hat{A} \to \hat{S}_x$ y $\hat{B} \to \hat{S}_y$.

14. Verifique la relación de incerteza con $\hat{A} \to \hat{S}_x$ y $\hat{B} \to \hat{S}_y$ para el estado $|S_x+\rangle$.

15. Encuentre la combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto

$$\left\langle(\Delta S_x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta S_y)^2\right\rangle \ .$$

Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para $\hat{S}_x$ y $\hat{S}_y$ no se viola.

16. Evalúe $\langle(\Delta x)^2\rangle\,\langle(\Delta p)^2\rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hágalo tanto para el estado base como para los estados excitados.

Parte III: Operadores y estados continuos.

17.
    a) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A con la propiedad $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$. Evalúe $\langle b''|f(A)|b'\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base a' y la base b'.
    b) Usando el análogo contínuo del resultado obtenido en (a), evalúe

    $$\langle\mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle$$

    Simplifique su expresión tanto como le sea posible. Note que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donde x, y, z son operadores.

18. *a*) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico
$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}}$$
b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evale el conmutador
$$[x,\, \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})]$$
y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

c) Usando el resultado de (b), pruebe que
$$\exp(\frac{ip_x a}{\hbar})|x'\rangle \text{ con } x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$
es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

19. Operador de Traslaciones

a) Consideramos dos observables $\hat{Q}$ y $\hat{P}$ tales que
$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar.$$
Definimos al operador
$$\hat{S} = e^{-i\frac{\lambda \hat{P}}{\hbar}}.$$
1) Demostrar que $\hat{S}$ es unitario.
2) Calcular $\hat{S}(-\lambda)$.
3) Mostrar que $\hat{Q}\hat{S}(\lambda) = \hat{S}(\lambda)[\hat{Q} + \lambda]$.
4) Mostrar que si $|q\rangle$ es un autovector (no nulo) de $\hat{Q}$, entonces $\hat{S}(\lambda)|q\rangle$ también lo es. Calcular su autovalor.
5) Sea $|q\rangle = \hat{S}(q)|0>$, donde $|0\rangle$ es un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor 0. Mostrar que $\hat{S}(\lambda)|q\rangle = |q + \lambda\rangle$.
6) Mostrar que $\langle q|\hat{S}(\lambda) = \langle q - \lambda|$.

20. *a*) Verifique que las igualdades
$$[x_i,\, G(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad [p_i,\, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$
pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

b) Evale $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$.

21. *a*) Pruebe lo siguiente
$$\begin{aligned} \langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle \\ \langle \beta|x|\alpha\rangle &= \int dp' \psi_\beta^*(p') i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p') \end{aligned}$$
donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.

b) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ix\Xi/\hbar)$, donde x es el operador posición y Ξ es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.